



# Problématique de l'homogénéisation des matériaux artificiels et résonnants présentant un indice de réfraction négatif

Divitha Seetharamdoo, Ronan Sauleau, Kouroch Mahdjoubi, Anne-Claude Tarot

## ► To cite this version:

Divitha Seetharamdoo, Ronan Sauleau, Kouroch Mahdjoubi, Anne-Claude Tarot. Problématique de l'homogénéisation des matériaux artificiels et résonnants présentant un indice de réfraction négatif. MajecSTIC 2005: Manifestation des Jeunes Chercheurs francophones dans les domaines des STIC, IRISA – IETR – LTSI, Nov 2005, Rennes, pp.409-412. inria-00000736

**HAL Id: inria-00000736**

**<https://inria.hal.science/inria-00000736>**

Submitted on 15 Nov 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Problématique de l'homogénéisation des matériaux artificiels et résonants présentant un indice de réfraction négatif

**Divitha Seetharamdoo, Ronan Sauleau, Kouroch Mahdjoubi, Anne-Claude Tarot**

Institut d'Électronique et de Télécommunications de Rennes (IETR),  
Université de Rennes1, Campus de Beaulieu, 35 042 - RENNES Cedex.  
divitha.seetharamdoo@univ-rennes1.fr

**Résumé :** Cette étude traite de métamatériaux à indice de réfraction négatif constitués d'une répartition périodique de tiges et anneaux résonants (aussi appelés Split Ring Resonators ou SRRs). Ces structures ayant des dimensions électriques voisines d'un dixième de la longueur d'onde, l'approximation des milieux effectifs est généralement faite et la permittivité et la perméabilité effectives sont calculées au sens de Fresnel. En effet, malgré la nature composite du milieu, nous l'assimilerons à un matériau homogène auquel nous affecterons des grandeurs macroscopiques identiques matériaux classique. Cependant, des auteurs ont démontré l'existence d'une bande de fréquence où la partie imaginaire de la permittivité est positive. Cette observation contredit notre intuition physique car cette partie imaginaire, représentant des pertes, devrait être négative quel que soit le signe de la partie réelle. La procédure d'«homogénéisation» de tels milieu semble donc avoir des limites. L'objectif de notre étude est d'interpréter les paramètres effectifs dans cette bande de fréquence anormale. Nous démontrons que leur validité au sens des équations de Fresnel est contestable. La participation d'onde évanescence à la propagation au sein de la structure périodique rend sa description macroscopique difficile. Dans la bande de fréquence où ces paramètres sont définis correctement, l'indice effectif atteint une valeur maximale dictée par la structuration du métamatériau.

**Mots-clés :** Matériau pour dispositifs micro-ondes, matériau artificiel, indice de réfraction négatif, propagation dans les milieux complexes, modélisation électromagnétique, homogénéisation, interaction onde-matière.

## 1 INTRODUCTION

Les métamatériaux à indice de réfraction négatif (MIRN) font l'objet de nombreuses études à travers différentes approches notamment, les lignes de transmission à rétropropagation, les cristaux photoniques et

les composites résonants. Dans ce travail, nous retiendrons cette dernière approche qui consiste en l'étude des milieux périodiques à tiges et anneaux résonants (Split Ring Resonators-SRR) introduits par Pendry *et al.* [Pendry, 1999]. L'expérience innovante de Smith *et al.* [Smith, 2000] consistant en l'assemblage de ces réseaux de pistes et de SRR pour créer un métamatériau à indice de réfraction négatif a été remise en question car les mesures n'avaient pas été effectuées en champ lointain [Sanz, 2003]. En effet, le prototype présentait des pertes importantes et les mesures en champ lointain étaient délicates. L'origine de ces pertes a été identifiée [Markos, 2002] et des échantillons faibles pertes ont été réalisés et mesurés. Les coefficients de réflexion et de transmission peuvent donc être définis au sens de Fresnel sans ambiguïté.

L'inversion de ces coefficients permet ensuite de déduire la permittivité ( $\epsilon_{eff}$ ) et la perméabilité ( $\mu_{eff}$ ) effectives. Cependant, les paramètres effectifs ainsi calculés présentent des caractéristiques particulières : l'existence d'une bande de fréquence où la partie imaginaire de  $\epsilon_{eff}$  prend des valeurs positives (pour une dépendance temporelle en  $e^{j\omega t}$ ) a été observée [O'Brien, 2002, Koschny, 2003]. Ces résultats contredisent notre intuition physique car cette partie imaginaire, représentant des pertes, devrait être négative quel que soit le signe de la partie réelle [Landau, 1984].

L'objectif de notre étude consiste donc en l'interprétation de ces paramètres effectifs et en la détermination de leur validité au sens des équations de Fresnel. À cette fin, nous confrontons les résultats d'homogénéisation issus de deux approches différentes, notamment l'inversion des équations de Fresnel et le calcul de la vitesse de phase issu du diagramme de dispersion. Une décomposition modale sera également effectuée dans le but d'étudier la transmission des différents modes au sein du métamatériau. Le domaine de validité des paramètres effectifs calculés par inversion des équations de Fresnel sera enfin discuté.

## 2 MILIEU PÉRIODIQUE ÉTUDIÉ

La structure retenue pour notre étude est celle présentée par K. Li [Li, 2003] car elle possède l'avantage de présenter de faibles pertes ; ses coefficients de réflexion et de transmission ont également été mesurés. Elle est présentée Fig. 1.

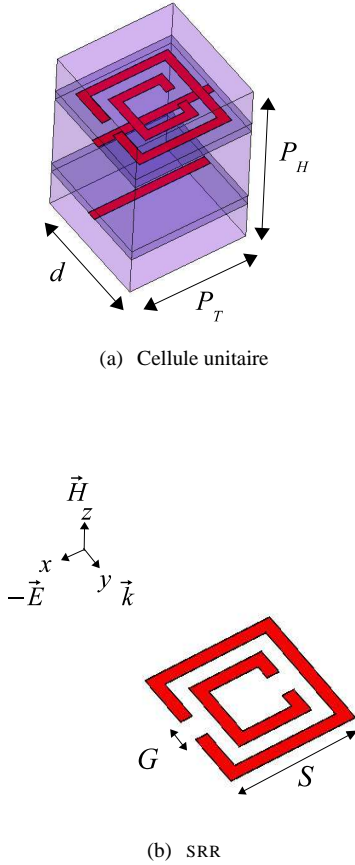


FIG. 1 – (a) Cellule unitaire du MIRN modélisé. (b) Anneau résonant

Les périodes de la cellule unitaire sont :  $P_H = 4.5\text{mm}$ ,  $P_T = 3.3\text{mm}$  et  $d = 3.3\text{mm}$ . La largeur de l'anneau carré  $S$  est de  $2.63\text{ mm}$ , la fente  $G$  de  $0.46\text{ mm}$  ; l'espacement entre anneaux vaut  $0.33\text{ mm}$ . Les pistes (cuivre d'épaisseur  $17\text{ }\mu\text{m}$ ) ont une largeur de  $0.25\text{ mm}$  et sont imprimées sur un substrat de Téflon ( $\epsilon_r = 2.2$ ,  $\tan \delta = 9 \times 10^{-4}$ ).

## 3 PARAMÈTRES EFFECTIFS CALCULÉS PAR INVERSION DES ÉQUATIONS DE FRESNEL

La première approche mise en oeuvre est l'inversion des équations de Fresnel pour la détermination de  $\epsilon_{eff}$  et de  $\mu_{eff}$  à partir des coefficients de transmission et de réflexion issus de calculs numériques par éléments finis [HFS, 2004]. La méthode d'inversion utilisée est décrite dans la référence [Seetharamdoo, 2004]. Elle s'applique sur une structure de dimension fi-

nie dans la direction de propagation en conservant uniquement les composantes propagatives du champ ; elle est généralement utilisée pour la caractérisation expérimentale de matériaux. Les parties réelles et imaginaires de  $\epsilon_{eff}$ ,  $\mu_{eff}$  et  $n_{eff}$  du composite de la Fig. 1 sont présentées Fig. 2(a) et Fig. 2(b). La perméabilité

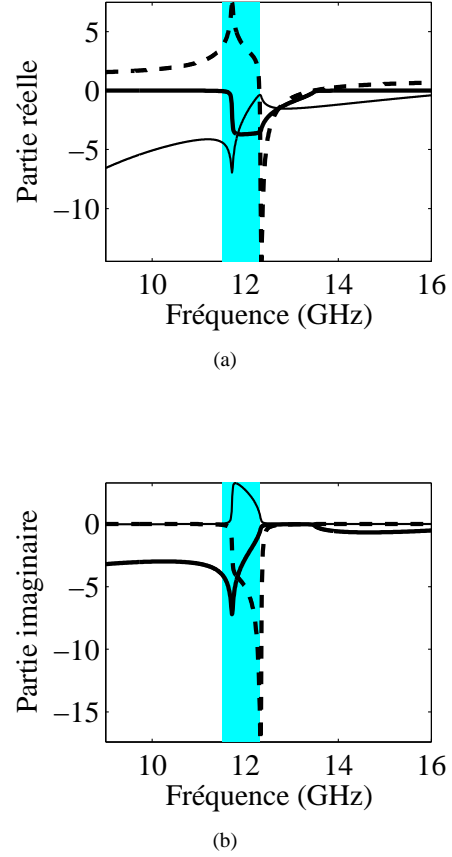
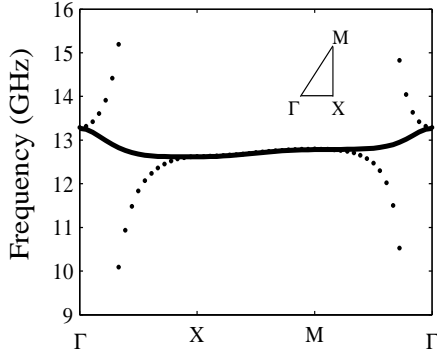


FIG. 2 – Parties réelles et imaginaires de la permittivité, perméabilité et indice effectifs du MIRN calculés avec la méthode d'inversion (la bande de fréquence grisée  $f_A$  représente la zone d'anomalie).

complexe présente une allure quasi-lorentzienne. La partie réelle de  $n_{eff}$  (Fig. 2(a)) sature à une valeur de  $-3.8$  dans la bande de fréquence  $f_A$  située autour de  $12\text{ GHz}$ . Dans cette même bande de fréquence, la partie réelle de la permittivité (Fig. 2(a)) est anti-résonante et sa partie imaginaire (Fig. 2(b)) prend des valeurs positives. Ce résultat contredit notre intuition physique car la partie imaginaire de la permittivité représente les pertes du milieu. Cette observation a été faite dans les références [O'Brien, 2002, Koschny, 2003] mais aucune interprétation n'est proposée. Afin d'interpréter ces paramètres effectifs, nous confrontons ces résultats à une deuxième approche d'homogénéisation.

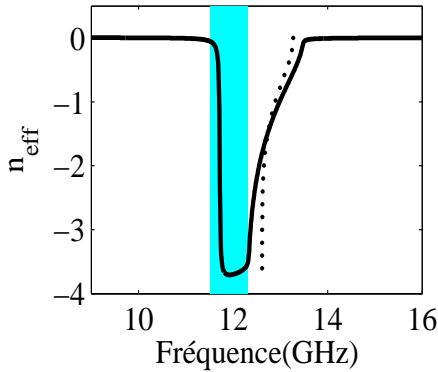
#### 4 DIAGRAMME DE DISPERSION

Cette approche consiste à calculer le diagramme de dispersion du milieu périodique à l'aide d'une méthode de recherche de valeurs propres du volume discrétisé en éléments finis [HFS, 2004]. Les courbes de dispersion (dans la première zone de Brillouin) du milieu à SRR seul d'une part, et celles du milieu constitué de SRR et de pistes d'autre part, sont montrées figure 3(a).



(a) Diagramme de dispersion

.... Métamatériau constitué de SRR seuls  
— MIRN : SRR et milieu à pistes



(b)  $n_{eff}$

....  $n_{eff}$  issu du contour  $\Gamma X$   
—  $Re(n_{eff})$  issu de la méthode d'inversion

FIG. 3 – (a) Diagramme de dispersion pour milieu à SRR seuls et pour le MIRN dans la 1<sup>ère</sup> zone de Brillouin. (b) Comparaison de l'indice effectif calculé avec la méthode d'inversion et celui issu du contour  $\Gamma X$  du diagramme de dispersion du MIRN.

Le milieu à pistes seules présente une bande interdite dans toute la bande de fréquence d'étude (non montrée). Le courbe de dispersion du MIRN a une pente négative sur le contour  $\Gamma X$  ; ce qui démontre que nous avons bien une rétropropagation pour ces valeurs de vecteur d'onde  $k$ .

L'indice effectif du milieu peut être calculé à partir de

la vitesse de phase déduite du diagramme de dispersion à l'aide de la relation :

$$n_{eff}(\omega) = \text{sign}(\nabla_k \omega) \frac{kc}{\omega} \quad (1)$$

avec  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide et  $\omega$  la pulsation propre calculée. L'indice effectif obtenu correspond à celle d'une structure considérée de dimension infinie dans la direction de propagation.

La superposition des indices de réfraction effectif obtenus sur le contour  $\Gamma X$  du diagramme de dispersion (polarisation TM) et la méthode d'inversion est présentée Fig. 3(b). La confrontation de ces deux approches est possible car la composante tangentielle du vecteur d'onde dans la relation de dispersion est conservée en passant d'une structure infinie à une structure finie. Les résultats issus des deux méthodes sont concordants *sauf* dans la bande de fréquence  $f_A$ .

#### 5 INTERPRÉTATION ET VALIDITÉ

Notons que dans la bande  $f_A$  le diagramme de dispersion ne prédit pas de propagation dans la structure infinie. De plus, la relation de dispersion peut également nous renseigner sur la valeur maximale du vecteur d'onde pouvant se propager dans le milieu et donc sur la valeur maximale atteinte par l'indice de réfraction effectif :

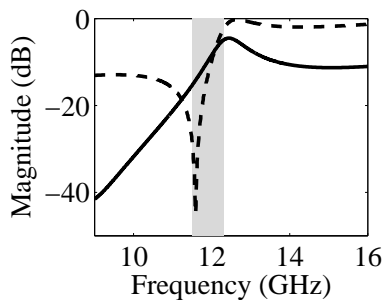
$$|n'_{max}| \leq \frac{\pi}{kd} = 3.8 \quad (2)$$

Cette valeur est cohérente avec celle observée pour le palier de  $n_{eff}$  calculé à l'aide de la méthode d'inversion (figure 2(a)). Nous pouvons donc supposer que l'anomalie observée dans la bande de fréquence  $f_A$  est due à la finitude de la structure dans la direction de propagation.

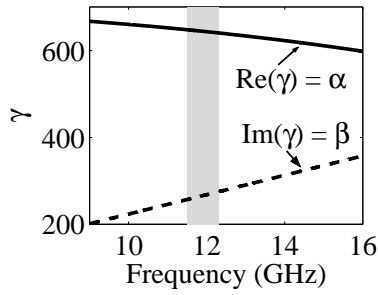
Afin d'étudier les composantes de champ présent et transmis au sein de la lame (milieu périodique de taille finie dans la direction de propagation), une décomposition modale est effectuée pour une cellule dans la direction de propagation. Le paramètre  $S_{21}$  modal pour les deux premiers modes est montré figure 4(a) et les constantes de propagation de ces modes figure 4(b).

Nous pouvons remarquer que le mode fondamental a une amplitude nettement moins élevée que le mode évanescent dans la bande  $f_A$ . La constante d'atténuation du mode évanescent est de l'ordre de -6 dBmm<sup>-1</sup>. Le rôle des composantes évanescentes pour assurer la continuité du champ au sein de la structure finie est clairement démontré dans cette bande de fréquence.

Ainsi, nous pouvons conclure que dans cette bande de fréquence, les paramètres effectifs ne peuvent pas être définis adéquatement au sens des équations de Fresnel qui ne prennent en compte que l'interaction des composantes propagatives au sein de la lame. Notons également qu'au delà de cette bande anormale (12.6-13.3 GHz), les paramètres effectifs calculés sont valables au sens de Fresnel.



(a)  $S_{21}$



(b) Constante de propagation

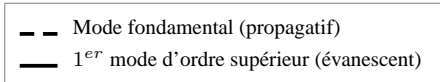


FIG. 4 – (a) Paramètre  $S_{21}$  modal (coefficient de transmission). (b) constante de propagation  $\gamma$  pour le mode fondamental (propagatif) et le mode évanescent d'ordre supérieur (La bande grisée représente la bande de fréquence  $f_A$ ). La partie réelle du mode fondamental et la partie imaginaire du mode d'ordre supérieur sont proches de zéro (non représentées).

## 6 CONCLUSION

Dans cette étude, nous nous sommes attachés à démontrer qu'il existe une bande de fréquence où les paramètres effectifs présentent des anomalies. Une étude approfondie nous a permis de contester leur validité au sens des équations de Fresnel. La participation des ondes évanescences à la propagation au sein de la lame ainsi que les fortes variations spatiales du champ au sein d'une cellule unitaire rendent sa description macroscopique difficile.

Nous avons également démontré qu'au delà de cette bande de fréquence, les paramètres pouvaient être définis sans ambiguïté au sens de Fresnel. Dans cette même bande, nous avons également montré que l'indice effectif pouvait atteindre une valeur maximale dictée par la structuration du métamatériau, *i.e.* les dimensions électriques de la période. Notons que pour des structures plus compactes, les valeurs d'indice atteintes peuvent être plus élevées [Seetharamdoo, 2005].

## REMERCIEMENTS

Ce travail est effectué dans le cadre du projet METAMAT financé par le Conseil Régional de Bretagne.

## BIBLIOGRAPHIE

- [HFS, 2004] HFSS, *High Frequency Structure Simulator v 9.1, finite element package*. Ansoft Corp.
- [Koschny, 2003] Koschny T., Markos P., Smith D. R. et Soukoulis C. M., Resonant and antiresonant frequency dependence of the effective parameters of metamaterials. *Phys. Rev. E*, 68 :065602(R).
- [Landau, 1984] Landau L. D., Lifschitz E. M. et Pitaevskii L. P., *Electrodynamics of continuous media*. Ed. Butterworth - Heinemann, Oxford.
- [Li, 2003] Li K., McLean S. J., Greigor R. B., Parazzoli C. G. et Tanielian M. H., Free-space focused beam characterization of left-handed materials. *Appl. Phys. Lett.*, 82 :2535.
- [Markos, 2002] Markos P., Rousochatzakis I. et Soukoulis C. M., Transmission losses in left-handed materials. *Phys. Rev. E*, 65 :045601(R).
- [O'Brien, 2002] O'Brien S. et Pendry J. B., Magnetic activity at infrared frequencies in structured metallic photonic crystals. *J. Phys. : Condens. Matter*, 14 :6383.
- [Pendry, 1999] Pendry J. B., Holden A. J., Robbins D. J. et Stewart W. J., Magnetism from conductors and enhanced non-linear phenomena. *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, 47 :2075.
- [Sanz, 2003] Sanz M., Papageorgopoulos A. C., Egelhoff J. W. F., Nieto-Vesperinas M. et Garcy N., Transmission measurements in wedge-shaped absorbing samples : An experiment for observing negative refraction. *Phys. Rev. E*, 67 :067601.
- [Seetharamdoo, 2005] Seetharamdoo D., Sauleau R., Mahdjoubi K. et Tarot A.-C., Conception de composites à perméabilité artificielle compacte : Modélisation et analyse. 14<sup>èmes</sup> Journées Nationales Microondes, Nantes - FRANCE.
- [Seetharamdoo, 2004] Seetharamdoo D., Sauleau R., Tarot A.-C. et Mahdjoubi K., Homogenisation of negative refractive index metamaterials : Comparison of effective parameters of broadside-coupled and edge-coupled split-ring resonators. *IEEE Antennas and Propagat. Society Intl. Symposium*, volume 4, pages 3761–3764, Monterey - Californie.
- [Smith, 2000] Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C. et Schultz S., Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :4184.